

第九届“希望杯”全国数学竞赛

高二 第2试

一、选择题

1. 曲线 $f(x, y) = 0$ 关于定点 $M(\alpha, \beta)$ 对称的曲线的方程是

A. $f(\alpha - x, \beta - y) = 0$ B. $f(\alpha + x, \beta + y) = 0$

C. $f(2\alpha - x, 2\beta - y) = 0$ D. $f(2\alpha - x, 2\beta - y) = 0$

2. 函数 $f(x) = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta}\right)^x + \left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha}\right)^x$, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, 若 $x > 0$ 时 $f(x) < 2$, 则

A. $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{4}$ B. $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ D. $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

3. 函数 $y = \arccos(ax - 1)$ 在 $[0, 1]$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是

A. $(1, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(0, 1]$ D. $(0, 2]$

4. 设 S 为半径等于 1 的圆内接三角形的面积, 则函数 $4S + \frac{9}{S}$ 的最小值是

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $7\sqrt{3}$ D. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

5. 已知复数 z 的模为 1, 则函数 $|z^2 + iz^2 + 1|$ 的值域是

A. $\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$ C. $[2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} + 1]$ D. $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$

6. 若 $2^{\sqrt{3x}}, 2^{\sqrt{x+y}}, 2^{\sqrt{x+1}}$ 成等比数列, 则点 (x, y) 在平面直角坐标系内的轨迹是

A. 一段圆弧 B. 椭圆的一部分 C. 双曲线一支的一部分 D. 抛物线的一部分

7. 设 a, b 是方程 $x^2 + (\cot \theta)x - \cos \theta = 0$ 的两个不等实根, 那么过点 $A(a, a^2)$ 和 $B(b, b^2)$ 的直线与圆的位置关系是

A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 随 θ 的值而变化

8. P 是抛物线 $y = x^2$ 上的任意一点, 则当 P 和直线 $x + y + 2 = 0$ 上的点的距离最小时, P 与该抛物线的准线的距离是

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

9. 二元函数 $(x-y)^2 + (x + \frac{1}{y} + 1)^2$ 的最小值是

A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

10. 过球心的 10 个平面, 其中任何三个平面都不交于同一条直线, 它们将球面分成

A. 92 部分 B. 1024 部分 C. 516 部分 D. 100 部分

二、填空题

11. 若 $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $a \in R$, 且分别满足方程 $x^3 + \sin x - 2a = 0$ 和

$4y^3 + \sin y \cos y + a = 0$, 则 $\cos(x+2y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 四面体 $A-BCD$ 中 $AD=BC=1$; E, F 分别是 AB, CD 上的点; 且

$BE:EA=CF:FD=1:2, EF=a$; 则 AD 和 BC 所成的角 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 不等式 $\arcsin|x| > \arccos|x|$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 函数 $y = \sin^2 x + 2a \sin x - a - 2$, ($a \in R$) 的最大值为 u , u 是 a 的函数, 其解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 不等边三角形的三个内角 A, B, C 成等差数列; 它们的公差为 θ ; 又 $\csc 2A, \csc 2B, \csc 2C$ 也成等差数列; 则 $\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 若 α, β 分别是方程 $\log_2 x + x + 2 = 0$ 和 $2^x + x + 2 = 0$ 的根, 则 $\alpha + \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 抛物线 $y = 2x^2$ 和圆 $x^2 + (y-a)^2 = 1$ 有两个不同的公共点, 则 $a \in \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x) - 4f(\frac{1}{x}) = x$, 则 $|f(x)|$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

19. 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 $S_n = n^2 a_n$, 则通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$, 数列 $\{a_n\}$ 的和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

20. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的内接三角形的最大面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

21. 若 $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in R$) 在区间 $[0, 1]$ 上恒有 $f(x) \leq 1$

(1) 对所有这样的 $f(x)$, 求 $|a| + |b| + |c|$ 的最大值;

(2) 试给出一个这样的 $f(x)$, 使 $|a| + |b| + |c|$ 确实取到上述最大值.

22. 右图是一个向右和向下方可以无限延伸的棋盘, 横排为行, 竖排为列, 将正整数按已填好的各个方格中的数字显现的规律填入各方格中.

1	2	4	7	
3	5	8	12	
6	9	13	18	
10	14	19	25	

- (1) 求位于第 3 行、第 8 列的方格内的数字;
- (2) 数字 321 在哪一个方格内?
- (3) 写出位于从左上角向右下角的对角线上的方格内的数字组成的数列的通项公式;
- (4) 求 (3) 中数列的前 n 项和.