

第十届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题（每小题6分）

1、已知 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的单调函数，则

(A) 函数 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称

(B) 函数 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的图象关于原点对称

(C) $f(-x)$ 和 $f(x)$ 的单调性相反

(D) 函数 $f(x+1)$ 和 $f^{-1}(x)-1$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称

2、已知 a, b, c 彼此不等，并且它们的倒数成等差数列，则 $\frac{a-b}{c-b} =$

(A) $\frac{a}{c}$ (B) $-\frac{a}{c}$ (C) $\frac{a}{b}$ (D) $-\frac{a}{b}$

3、已知椭圆 $a^2x^2 - \frac{a}{2}y^2 = 1$ 的焦距是 4，则 $a =$

(A) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

4、棱长为 1 的正方体和它的外接球与一个平面相交得到的截面是一个圆及它的内接正三角形，那么球心到该截面的距离等于

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$

5、在复平面内由 $\frac{1}{i}, \overline{i-1}, (i-1)^3$ 对应的点构成的三角形的最大内角等于

(A) $\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$ (B) $-\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$ (C) 45° (D) 120°

6、 P 是双曲线 f 上的任意一点， F 是 f 的一个焦点， l 是与 F 对应的准线， P 到 l 的距离为 d ， f 的准线间距为 L ，焦距为 c ，则下面关系式中成立的是

(A) $\frac{|PF|}{d} > \frac{c}{L}$ (B) $\frac{|PF|}{d} = \frac{L}{c}$ (C) $\frac{|PF|}{d} = \sqrt{\frac{c}{L}}$ (D) $\frac{|PF|}{d} = \sqrt{\frac{L}{c}}$

7、若函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} |x+a|$ 的图象不经过第二象限，则 a 的取值范围是

(A) $(0, +\infty)$ (B) $[1, +\infty)$ (C) $(-\infty, 0)$ (D) $(-\infty, -1]$

8、若函数 $y = \cos^2 x - 3\cos x - a$ 的最小值是 $-\frac{3}{2}$ ，则 a^y 的值域是

- (A) $[2^{-\frac{5}{2}}, 2^{\frac{3}{2}}]$ (B) $[2^{-\frac{3}{2}}, 2^{\frac{5}{2}}]$ (C) $[2^{-\frac{3}{2}}, 2]$ (D) $[2, 2^{\frac{5}{2}}]$

9、函数 $y = -\sqrt{4-x^2} (x \leq 1)$ 的曲线长度是

- (A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) 2π (D) $\frac{8\pi^2}{3}$

10、已知 $n \in N$ ，常数 p, q 均大于 1，且都不等于 2，则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^{n+1} - q^n}{p^{n+2} - 2q^{n+1}} =$

- (A) $\frac{1}{p}$ 或 $\frac{1}{2q}$ (B) $-\frac{1}{p}$ 或 $-\frac{1}{2q}$ (C) $\frac{1}{p}$ 或 $\frac{1}{2q}$ 或 $\frac{p-1}{p^2-2q}$ (D) $-\frac{1}{p}$ 或 $-\frac{1}{2q}$ 或 $\frac{1-p}{p^2-2q}$

二、填空题

11、将一个三棱锥和一个三棱柱接成一个多面体，这个多面体的面数最少可达到_____。

12、某个圆的圆心在双曲线的一条准线上，并且圆经过双曲线的一个顶点和一个焦点，则双曲线的离心率是_____。

13、若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{3}{4}$ ，则该数列的公比是_____。

14、已知函数 $\lg(ax^2 - 2x + 1)$ 的值域是一些实数，则实数 a 的取值范围是_____。

15、适合方程 $\tan x = \frac{\cos 99^\circ + \sin 99^\circ}{\cos 99^\circ - \sin 99^\circ}$ 的最小正整数 x 是_____。

16、数列 $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \dots$ 的前 n 项和等于_____。

17、实数 x, y 满足方程 $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 9$ ，则 $2x - 3y$ 的最大值和最小值的和等于_____。

18、直线 $l: ax - y - (a-5) = 0$ 与抛物线 $f: y = (x+1)^2$ 的相交弦是 AB ，则 AB 的中点的轨迹方程是_____。

19、在一支 15cm 粗细均匀的圆柱形蜡烛的下端固定一个薄金属片（体积不计），使蜡烛恰好能竖直地浮于水中，上端有 1cm 高的部分露在水面以上，已知蜡烛的比重为 0.85 克每立方厘米，现在点燃蜡烛，当蜡烛被水淹没时，它的剩余长度是_____。

20、某大楼共有 20 层，有 19 人在第一层上了电梯，他们分别要去第 2 层至第 20 层，每层 1 人，而电梯只允许停一次，只可使 1 人满意，其余 18 人都要步行上楼或下楼，假设乘客每向下走一层的不满意度为 1，每向上走一层的不满意度为 2，所有人的不满意度为 S ，为使 S 最小，电梯应当停在第_____层。

三、解答题（每题 15 分）

21、已知点 $A(\sqrt{5}, 0)$ 和曲线 $y = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ ($2 \leq x \leq 2\sqrt{5}$) 上的点 P_1, P_2, \dots, P_n ，若

$|P_1A|, |P_2A|, \dots, |P_nA|$ 成等差数列并且公差 $d \in (\frac{1}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ，求 n 的最大值。

22、设 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 是实数，且满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ 。证明不等式：

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)^2$$