

第十一届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + 1)^x$ 是

A. 偶函数 B. 奇函数 C. 奇且偶函数 D. 非奇非偶函数

2. 三角形 ABC 中, $BC = 6$, BC 上的高为 4, 则 $AB \times AC$ 的最小值是

A. 24 B. 25 C. $24\sqrt{2}$ D. 26

3. If $l_1: x+3y-7=0, l_2: kx-y-2=0$ and positive x -axis and positive y -axis make a quadrilateral, which has a circumcircle then $k =$

A. -6 B. -3 C. 3 D. 6

4. 直线 $y = x+3$ 和曲线 $-\frac{x|x|}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的交点的个数是

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 若 $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, 且 $f(1) = 2$, 则 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)}{f(5)} + \dots + \frac{f(2000)}{f(1999)} =$

A. 1999 B. 2000 C. 2001 D. 2002

6. 若定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $f(\frac{1}{3}) = 0$, 则不等式

$f(\log_{\frac{1}{8}} x) > 0$ 的解是

A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ D. $(\frac{1}{2}, 1) \cup (2, +\infty)$

7. 将圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的中心到直线 $y = kx$ 的距离记为 $d = f(k)$, 给出以下三个判断:

(1) 数列 $\{nf(n)\}$ 是递增数列

(2) 数列 $\{\frac{1}{f^2(n)}\}$ 的前 n 项和是 $\frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{f(n+1)} - \frac{1}{f(n)})^{-1} = 1$

其中, 正确的个数是

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

8. 设计一条隧道, 要使高 3.5 米, 宽 3 米的巨型载重车辆能通过, 隧道口的纵断面是抛物线状的拱, 拱宽是拱高的 4 倍, 那么拱宽的最小整数值是

A . 14 B . 15 C . 16 D . 17

9 . 已知 $x, y, z \in R^+$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$, 则 $x + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$ 的最小值是

A . 5 B . 6 C . 8 D . 9

10 . 从一个半径是 1 分米的圆形铁片中剪去圆心角为 x 弧度的一个扇形 , 将余下的部分卷成一个圆锥 (不考虑连接处用料) , 当圆锥的容积达到最大时 , x 的值是

A . $\frac{\pi}{2}$ B . $\frac{\pi}{3}$ C . $(3 - \sqrt{2})\pi$ D . $\frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}\pi$

二、填空题

11 . 空间中与一个位置确定的三角形的三条边距离都相等的点的轨迹是_____.

12 . R is the domain of $f(x)$, and “ $f(\tan x) = \sin 2x$ ” is true when the real number $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, then the maximum of $f(\sin 2x)$ is _____.

13 . 设 $f(x) = x^2 + bx + 9$, $g(x) = x^2 + dx + e$, 若 $f(x) = 0$ 的根是 r, s , $g(x) = 0$ 的根是 $-r, -s$, 则 $f(x) + g(x) = 0$ 的根是_____.

14 . 已知定点 $A(1,1), B(3,3)$, 点 P 在 x 轴上运动 , 当 $\angle APB$ 最大时 , 点 P 的横坐标是_____.

15 . 已知 $A(-1, \sqrt{3})$, O 是坐标原点 , 线段 OA 在坐标平面内绕原点顺时针旋转 , 扫过的面积是 $\frac{14\pi}{3}$, 这时 A 点到达的位置 A' 的坐标是_____.

16 . 数列 $\{a_n\}$ 满足 : $a_{n+1} = (-1)^{n+1}n - 2a_n, n \geq 1$ 并且 $a_1 = a_{2001}$, 则此数列的前 2000 项的和是_____.

17 . 已知三角形 ABC 中 , $\angle C = 90^\circ, CB = a, CA = b$, 点 P 在三角形三边上运动 , 则 $PA + PB + PC$ 的最小值是_____.

18 . 三棱台 $ABC - DEF$ 上、下底面边长的比是 $1 : 2$ (上底为 ABC) , G 是侧棱 CF 的中点 , 则棱台被截面 AGE 分成的上、下两部分体积的比是_____.

19 . 圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点 F_1, F_2 , 且与该椭圆

有四个不同的交点 , 设 P 是其中的一个交点 , 若三角形 PF_1F_2 的面积为 26 , 椭圆的长轴为 15 , 则 $a + b + c =$ _____.

20 . 当 α 是锐角时 , $(\sin \alpha + \tan \alpha)(\cos \alpha + \cot \alpha)$ 的值域是_____.

三、解答题

21. 当 $-1 \leq x \leq 1$, 记函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - \frac{2}{3}ax + a^2 + 2)$ 的极大值为 $g(a)$, 试求 $g(a)$ 的

最大值.

22. 一个棱长为 l 的立方体平放于桌面上, 将它由上而下地沿水平方向切成 n 等份, 依次记为 a_1, a_2, \dots, a_n , 然后:

从 a_1 切下一个长为 $\frac{2l}{n}$ 宽为 $\frac{l}{n}$ 厚为 $\frac{l}{n}$ 的长方体, 它的体积记为 V_1 ;

从 a_2 切下一个长为 $\frac{3l}{n}$ 宽为 $\frac{2l}{n}$ 厚仍为 $\frac{l}{n}$ 的长方体, 它的体积记为 V_2 ;

从 a_3 切下一个长为 $\frac{4l}{n}$ 宽为 $\frac{3l}{n}$ 厚仍为 $\frac{l}{n}$ 的长方体, 它的体积记为 V_3 ;

如此继续下去.....

求: (1) $V_k (1 \leq k < n)$ (2) $\sum_{k=1}^{n-1} V_k$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} V_k$

23. 求所有的正实数 a , 使得对任意实数 x 都有 $a^{\cos 2x} + a^{2\sin^2 x} \leq 2$.