第十三届“希望杯”全国数学邀请赛试题

高二 第2试

一. 选择题

1. 设 x，y 满足 $\arccos(y-2)=\arcsin(x-1)$，则 $3x+y$ 的取值范围是（ ）

A. $[5-\sqrt{10}, 5+\sqrt{10}]$ B. $[5-\sqrt{10}, 6]$ C. $[6, 8]$ D. $[6, 5+\sqrt{10}]$

2. 方程 $x^5+x+1=0$ 和 $x+\sqrt[5]{x}+1=0$ 的实根分别为 α 和 β，则 $\alpha+\beta$ 等于（ ）

A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

3. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}$ 的值域是（ ）

A. $(-\infty, \frac{1}{2}\log_2 6]$ B. $(-\frac{1}{2}\log_2 6, \frac{1}{2}\log_2 6]$

C. $[-\frac{1}{2}\log_2 6, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2}\log_2 6, +\infty)$

4. 四面体 ABCD 的各面都是锐角三角形，且 $AB=CD=a$，$AC=BD=b$，$AD=BC=c$。平面 π 分别截棱 AB、BC、CD、DA 于点 P、Q、R、S，则四边形 PQRS 的周长的最小值是（ ）

A. 2a B. 2b C. 2c D. $a+b+c$

5. 从空间一点引三条不共面的射线，则以每条射线为棱的三个二面角的和的取值范围是（ ）

A. $(180°, 270°)$ B. $(180°, 360°)$ C. $(180°, 540°)$ D. $(270°, 540°)$

6. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2a^2}=1$ 上有三点 P_i（x_i，y_i）（$i=1，2，3$），它们到同一个焦点的距离分别是 d_1，d_2，d_3，则 d_1，d_2，d_3 成等差数列的充要条件是（ ）

A. x_1，x_2，x_3 成等差数列

B. y_1，y_2，y_3 成等差数列

C. 上述（A）、（B）同时成立

D. （A）、（B）以外的条件

7. 若不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le m\sqrt[4]{a^2+b^2}$ 对所有正实数 a，b 都成立，则 m 的最小值是（ ）

A. 2 B. $2^{\frac{3}{2}}$ C. $2^{\frac{3}{4}}$ D. 4

8. 不等式$x-2-|x^2-4x+3|\ge 0$的解集是（　　）

A. $[\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}]$　　B. $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{5+\sqrt{5}}{2}]$

C. $(-\infty,\frac{3+\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{5+\sqrt{5}}{2}$，$+\infty]$　　D. $[\frac{5-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{3+\sqrt{5}}{2}]$

9. 将 3 个半径为 1 的球和一个半径为$\sqrt{2}-1$的球叠为两层放在桌面上，上层只放一个较小的球，四个球两两相切，那么上层小球的最高点到桌面的距离是（　　）

A. $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

10. Given two sequences $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ with positive terms, let $\{a_n\}$ be arithmetic with the common difference d，let b_n be the length of the line segment cut by the parabola $y=a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}$（$n\in N$）from the $x-axis$. Then $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n)=$（　　）

（英汉小字典：common difference 公差；parabola 抛物线；$x-axis$ ：x 轴）

A. $\frac{d}{a_1}$　　B. $\frac{2d}{a_1}$　　C. $\frac{3d}{a_1}$　　D. $\frac{4d}{a_1}$

二. 填空题

11. 已知$f(x)$是区间［-2，2］上的增函数，且$f(2)=4$，若$f(x)\le m^2-2am+3$对所有的$x\in$［-2，2］和$a\in$［-1，1］恒成立，则实数 m 的取值范围是__________。

12. 已知方程$a\cos x+b\sin x=c$在$0<x<\pi$上有两个根α和β，则$\sin(\alpha+\beta)=$____。

13. 设α和β分别是方程$\cos(\sin x)=x$和$\sin(\cos x)=x$在区间（0，$\frac{\pi}{2}$）上的解，则它们的大小关系是________。

14. 已知α,β,γ均为锐角，且$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，则$\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma$的最大值等于_________。

15. 已知定直线l上有三点 A，B，C，$AB=2$，$BC=5$，$AC=7$。动圆 O 恒与l相切于点 B，则过 A、C 且都与⊙O 相切的直线l_1、l_2的交点 P 的轨迹是________。

16. 复数 z 满足条件$\arg\frac{2z+1}{z-1}=\frac{\pi}{4}$，则$|z|$的取值范围是_______。

17. 抛物线系 $y^2=mx+2m^2+1(m\in R)$ 在 xy 平面上不经过的区域是________，其面积等于_________。

18. Given the function $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ and $-1\le x\le 1$。If there must exist at least one real number *c* such that $f(c)>0$. Then the range of *p* is ________。

19. 在四面体 ABCD 中，面 BAC、CAD、DAB 都是以 A 为顶点的等腰直角三角形，且腰长为 a。过 D 作截面 DEF 交面 ABC 于 EF，若 $EF // BC$，且将四面体的体积二等分，则面 DEF 与面 BCD 的夹角等于________。

20. 长为 l（$l<1$）的线段 AB 的两端在抛物线 $y=x^2$ 上滑动，则线段 AB 的中点 M 到 x 轴的最短距离等于________。

三. 解答题

21. 从半径为 1 的圆铁片中去掉一个半径为 1、圆心角为 x 的扇形，将余下的部分卷成无盖圆锥。

（1）用 x 表示圆锥的体积 V；

（2）求 V 的最大值。

22. 已知抛物线 $y^2=4ax(a>0)$ 的焦点为 F，以点 A（$a+4$，0）为圆心，$|AF|$为半径的圆在 x 轴的上方与抛物线交于 M、N 两点。

（1）求证：点 A 在以 M、N 为焦点，且过 F 的椭圆上。

（2）设点 P 为 MN 的中点，是否存在这样的 a，使得$|FP|$是$|FM|$与$|FN|$的等差中项？如果存在，求 a 的值；如果不存在，说明理由。

23. 用水清洗一堆水果上残存的农药，假定用 1 个单位的水可清洗掉水果上残存农药量的 50%。用水越多，清洗越干净，但总还有极少量农药残存在水果上。设用 x 个单位的水清洗一次水果后，残存的农药量与本次清洗前残存的农药量之比记为函数 $f(x)$。

（1）请规定 $f(0)$ 的值，并说明其实际意义。

（2）写出 $f(x)$ 满足的条件和具有的性质。

（3）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，现有 $m(m>0)$ 个单位的水，可以清洗一次，也可以把水等分成 2 份后清洗两次，说明哪种方案能使水果上残存的农药量较少。