

第十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. 如果向量 $u = (3, -6), v = (4, 2), w = (-10, -5)$, 那么下列结论中错误的是
A、 $u \perp v$ B、 $u // v$ C、 $u \perp w$ D、 $v // w$
2. 设 $f(x) = x^2 + bx + c$ ($b, c \in R$) , $A = \{x | x = f(x), x \in R\}$, $B = \{x | x = f(f(x)), x \in R\}$, 如果 A 中只含有一个元素, 则
A、 $A \subset B$ B、 $A \supset B$ C、 $A = B$ D、 $A \cap B = \emptyset$
3. 在一次知识竞赛中, 甲、乙、丙三名选手一共做出了 100 道试题, 每人都做出了 60 道题, 若定义只有一人做出的题为难题, 只有二人做出的题为中档题, 三人都做出的题为容易题, 则下列结论中错误的是
A、 难题比容易题多 20 道 B、 难题至少有 20 道 C、 中档题不多于 80 道 D、 容易题多于 40 道
4. 设 $0 < \alpha, \beta < \pi/2$, 则 $\alpha + \beta = \pi/2$ 是 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha + \beta)$ 成立的
A、 充分不必要条件 B、 必要不充分条件 C、 充要条件 D、 即不充分也不必要条件
5. 函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 3}$ 达到最大值时, x 的值是
A、 $5 + 9\sqrt{3}$ B、 $9 + 5\sqrt{3}$ C、 $5\sqrt{2} + \sqrt{3}$ D、 $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$
6. 当 $x \in [0, \pi]$ 时, 下列不等式中一定成立的是
A、 $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ B、 $\cos(\cos x) < \sin(\sin x)$
C、 $\sin(\cos x) > \cos(\sin x)$ D、 $\cos(\sin x) > \cos(\sin x)$
7. 数列 $\{a_n\}$ 中, 橙子奥数工作室录入暗记, $a_1 = 2, a_{n+1} = \sqrt{\frac{3+a_n}{2}}$ 且 $b_n = |a_{n+1} - a_n|$ ($n \in N_+$) , 设 S_n 是 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 则下列不等式中一定成立的是
A、 $0.3 < S_n < 0.4$ B、 $0.4 < S_n < 0.5$ C、 $0.5 < S_n < 0.8$ D、 $0.5 < S_n < 0.9$
8. 曲线 $\sqrt{4-x^2-y^2} \sqrt{2x-y+\sqrt{5}} = 0$ 所围成的区域中包含的最大圆的面积是
A、 $\pi/4$ B、 $5\pi/4$ C、 $7\pi/4$ D、 $9\pi/4$
9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别是 AB 、 CC_1 的中点, 直线 EF 与 AC_1 所成角的余弦值是
A、 $\sqrt{2}/3$ B、 $2\sqrt{2}/3$ C、 $\sqrt{3}/4$ D、 $\sqrt{3}/6$
10. 抛物线 $y = x^2$ 在点 $A(m, m^2)$ 的切线与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相切, 则
A、 $-3 < m < -2$ B、 $-2 < m < -1$ C、 $-1 < m < 0$ D、 $-1 < m < 5$

二、填空题

11. 方程 $\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = 3 \tan 2x$ 的解集是_____.
12. 若双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的右支上有一点 $P(a, b)$ 到直线 $y = x$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 则 $a + b =$ _____.
13. 当 $a > b > 0$ 时, 使不等式 $\frac{a}{\sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{a}} > k(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 恒成立的常数 k 的最大值是_____.
14. 平面直角坐标系内的格点(横、纵坐标都是整数的点)到直线 $6x + 8y = 15$ 的最近距离是_____.

15. 当 $\arctan \frac{1}{6} \leq x \leq \arctan \frac{1}{3}$ 时, $\csc x - \cot x$ 的取值范围是_____.

16. 与直线 $x - 3y = 0$ 和 $3x - y = 0$ 相切, 且过点 $A(11, -7)$ 的圆的方程是_____.

17. 若函数 $y = \log_2[ax^2 - 3x + (a-1)]$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是单调递减的, 则参数 a 的取值范围是_____.

18. 设正三棱锥底面的边长为 a , 侧面组成直二面角, 则该棱锥的体积等于_____.

19. 数列 $\{a_n\}$ 中, 橙子奥数工作室录入暗记, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}a_n - 1}{a_n + \sqrt{3}}$ (其中 $n \in N_+$), $a_{2004} =$ _____.

20. 记关于 x 的函数 $y = \cos 2x + 3a \sin x$ 的最大值为 $g(a)$, 则 $g(a)$ 的解析式是_____.

三、解答题

21. 已知函数 $y = f(x)$ 有反函数 $y = f^{-1}(x)$

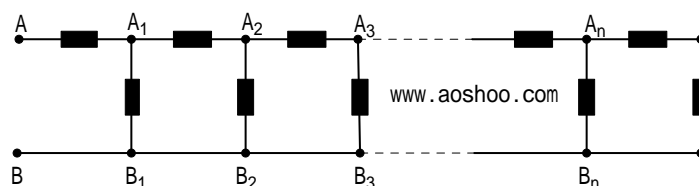
把 $y = f(x)$ 的图象绕原点顺时针旋转 90° , 求所得曲线的方程 (用反函数表示).

把曲线 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$ 绕原点顺时针旋转 90° , 求所得曲线的方程.

22. 下图是由无限个阻值均为 1 欧姆的电阻按一定规律组成的网络, 若从图中 A_1B_1 处沿虚线将网络截断, A 、 B 间电阻为 R_1 (欧姆), 若从 A_2B_2 处沿虚线将网络截断, A 、 B 间电阻为 R_2 (欧姆), 依次类推, 若 A_nB_n 处沿虚线将网络截断, A 、 B 间电阻为 R_n (欧姆).

求数列 $\{R_n\}$ 的通项.

当网络趋于无穷时, 求 A 、 B 间的电阻 R (欧姆).



23. 求椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 所围成的图形的面积.

求椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 与直线 $x = -1$ 及 $x = 2$ 所围成的图形的面积.