

第十六届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

A、0 B、 $\frac{\pi}{2}$ C、 π D、 $\frac{7\pi}{6}$

2. 已知关于 x 的不等式 $\frac{6}{x-1} + ax + b > 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的解集为 $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$, 则 $a + b =$

A、3 B、4 C、5 D、6

3. 函数 $y = \frac{e - e^x}{\sqrt{1 - e^x}}$ 的值域是

A、 $(e, +\infty)$ B、 $[2\sqrt{e-1}, +\infty)$ C、 $[e, +\infty)$ D、 $(2\sqrt{e-1}, +\infty)$

4. 已知 m, n 为正数, 且 $m \cdot n^{1+\lg m} = 1$, 则 mn 的取值范围是

A、 $(-2, 2)$ B、 $(10^{-2}, 100)$ C、 $(0, 10^{-4}] \cup [1, +\infty)$ D、 $(0, 10^{-4})$

5. 函数 $y = \sin ax + \cos ax$ 的最小周期为 4, 则它的对称轴可能是直线

A、 $x = -\frac{\pi}{2}$ B、 $x = 0$ C、 $x = \frac{\pi}{2}$ D、 $x = \frac{1}{2}$

6. Given the circle $C: x^2 + y^2 = 2$ and point $P(3, 4)$, let lines PA and PB be tangent to C at points A and B respectively. Then the equation of line AB is

A、 $3x - 4y - 2 = 0$ B、 $3x + 4y - 2 = 0$ C、 $4x - 3y + 2 = 0$ D、 $4x + 3y + 2 = 0$

(英汉词典 be tangent to : 与……相切 respectively : 分别)

7. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 若 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right) \geq k$ 恒成立, 则 k 的最大值是

A、1 B、2 C、3 D、4

8. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} x+2y \geq 10 \\ 2x+y \geq 12 \\ x \geq 3 \\ y \geq 2 \end{cases}$, 则 $2x+3y$ 的最小值是

A、18 B、24 C、 $\frac{33}{2}$ D、 $\frac{52}{3}$

9. 椭圆的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆上的一点 P 和两个焦点 F_1, F_2 连线的夹角 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$,

且点 P 到两准线的距离分别为 2 和 6, 则椭圆的方程为

A、 $\frac{x^2}{13} + \frac{16y^2}{39} = 1$ B、 $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{3} = 1$ C、 $\frac{x^2}{8} + \frac{13y^2}{39} = 1$ D、 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$

10. 给定 $(0, 1)$ 范围内的任意四个不同的实数 m_1, m_2, m_3, m_4 , 若 $a, b \in \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ 且满足条件

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < ab + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2} < 1, \text{ 则这样的有序数对 } (a, b) \text{ 的个数至少是}$$

A、6 B、4 C、2 D、0

二、填空题

11. 函数 $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$ 的最大值是_____, 最小值是_____.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为无穷递缩等比数列, 橙子奥数工作室教学档案防盗暗记, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{2}$,

则 $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots = \frac{1}{4}$, 则 $a_n =$ _____.

13. 实数 x, y 满足 $2x^2 + 4xy + 2y^2 + x^2y^2 \leq 20$, 则 $2\sqrt{2}(x+y) + xy$ 的取值范围是_____.

14. Let triangle ABC be regular, let point P be its center of gravity and M_1, M_2, M_3 be arbitrary points on each side respectively. Then the minimum of $PM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + M_3P$ (sum of the length of line segments) is _____.

(英汉词典 regular: 规则的, 正的 center of gravity: 重心 arbitrary point: 任意点)

15. 点 P, Q 在椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上运动, 定点 C 的坐标为 $(0, 3)$, 且 $\overline{CP} + \lambda \overline{CQ} = 0$, 则 λ 的取值范围是_____.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线与它的右准线交于点 A , F 为双曲线的右焦点, 且直线 FA 的倾斜角为 $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$, 则此双曲线的离心率为_____.

17. 平面内的向量 $\overline{OA} = (1, 1)$, $\overline{OB} = (-1, -1)$, 点 P 是抛物线 $y = x^2 + 2 - 3$ ($-3 \leq x \leq 1$) 上任意一点, 则 $\overline{AP} \cdot \overline{BP}$ 的取值范围是_____.

18. 一个路灯的顶部灯罩是半径为 R 的半球状, 半球底面朝下并与地面平行, 当阳光以 θ 角 (光线与地面所成角) 照射在该灯时, 灯罩在地面上的影子的面积等于_____.

19. Solution set of the inequality $\log_3(x+5) < 1 + \frac{1}{2} \log_3(25-x^2)$ with respect to x is _____.

20. 过正四面体的一条底边的平面把正四面体的体积自下而上分成 m, n 两部分, 则此平面与正四面体的底面夹角的余切值等于_____.

三、解答题

21. 求函数 $y = x^2 + \frac{3}{x}$ 的单调区间.

22. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n - a_{n+1} = a_{n+1} + 3a_n a_{n+1}$

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

已知 $y = f(x)$ 是偶函数, 橙子奥数工作室录入暗记, 且对于任何 x 都有 $f(1+x) = f(1-x)$, 当 $x \in [-2, -1)$ 时, $f(x) = \log_2 |x+1|$. 求使 $f(x) + a_n < 0$ ($n \in N^+$) 恒成立的 x 的取值范围.

23. 已知双曲线 C_1 的焦点在坐标轴上, 其渐近线与圆 $5x^2 + 5y^2 - 10x + 4 = 0$ 相切, 过点 $P(-4, 0)$ 且倾斜角为 $\arcsin \frac{\sqrt{17}}{17}$ 的直线交双曲线 C_1 于 A 、 B 两点 (点 P 位于 A 、 B 两点之间), 交 y 轴于点 Q , 若

$$|PA| \cdot |PB| = |PQ|^2$$

求双曲线 C_1 的方程;

以原点为中心、双曲线 C_1 的顶点为顶点的椭圆 C_2 中, 平行于双曲线一条渐近线的弦的中点的轨迹恰是另一条渐近线截在椭圆内的部分. 求双曲线 C_1 和椭圆 C_2 的离心率.