

第十七届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

2006年4月16日 上午8:30至10:30

一、选择题（每小题4分，共40分）

1. 命题 p : 偶函数一定没有反函数 ; 命题 q : 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的单调递减区间是 $[-1, 0) \cup (0, 1]$. 则
 A、 p 真 q 真 B、 p 真 q 假 C、 p 假 q 真 D、 p 假 q 假
2. 若不等式 $|x - m| < 1$ 成立的充分不必要条件是 $2 < x < 3$, 则实数 m 的取值范围是
 A、 $(2, 3)$ B、 $[2, 3]$ C、 $(-\infty, 2)$ D、 $[3, +\infty)$
3. 设直角三角形两直角边的长分别为 a 和 b , 斜边 c 上的高为 h , 则
 A、 $a + b < c + h$ B、 $a + b > c + h$ C、 $a + b = c + h$ D、以上都不正确
4. 函数 $y = \sqrt{5 - 4x - x^2} + \ln(\cos 2x + \sin x - 1)$ 的定义域是
 A、 $0 < x < \frac{1}{2}$ B、 $(-\frac{7\pi}{6}, -\pi) \cup (0, \frac{\pi}{6})$ C、 $(-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}) \cup (0, \frac{\pi}{6})$ D、 $(0, \frac{\pi}{6})$
5. 若 $-\pi/2 < x < \pi/2$, 则不等式 $|\sec^2 x - 3 \tan x - 5| < \tan x + 1$ 的解集是
 A、 $(0, \arctan 3)$ B、 $(\arctan 3, \arctan 5)$ C、 $(\arctan 5, \frac{\pi}{2})$ D、 $(-\frac{\pi}{2}, \arctan 3) \cup (\arctan 5, \frac{\pi}{2})$
6. 过双曲线, 橙子奥数工作室防盗暗记, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点 P , 引与实轴平行的直线, 交两渐进线于 M 、 N 两点, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} =$
 A、 a^2 B、 b^2 C、 $2ab$ D、 $a^2 + b^2$
7. 定义平面上的区域 D 如下: 若 P 为 D 内的任意一点, 则过 P 点必定可以引抛物线 $y = mx^2 (m < 0)$ 的两条不同的切线, 则 $D =$
 A、 $\{(x, y) | y > mx^2\}$ B、 $\{(x, y) | y > 2mx^2\}$ C、 $\{(x, y) | y < mx^2\}$ D、 $\{(x, y) | y < 2mx^2\}$
8. 已知 $4^{\sqrt{x}}, 4^{\sqrt{x+y}}, 4^{\sqrt{3x+2}}$ 成等比数列, 则点 (x, y) 在平面直角坐标系中的轨迹为
 A、圆的一部分 B、椭圆的一部分 C、双曲线的一部分 D、抛物线的一部分
9. In Fig.1, let P and Q be two moving points on the edges DH and BF of a cube such that $HP = BQ$, then the range of the angle formed by plane PQC and base $ABCD$ is
 A、 $[\arccos \frac{2\sqrt{3}}{3}, \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}]$ B、 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ C、 $[\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\pi}{4}]$ D、 $[\arccos \frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\pi}{4}]$

(英汉词典: edge 棱, 边; cube 立方体; range 值域, 范围; base 底面)

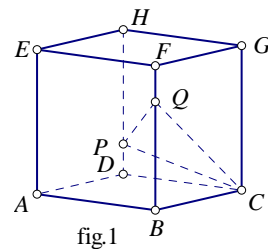
10. 平面内有4个圆和1条抛物线, 它们可将平面分成的区域的个数最多是

A、29 B、30 C、31 D、32

二、填空题（每小题4分，共40分）

11. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 的单调递减区间是_____.

12. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (x < 0) \\ \sqrt{-\frac{x}{2} + 1} & (0 < x \leq 2) \end{cases}$ 的反函数是_____.



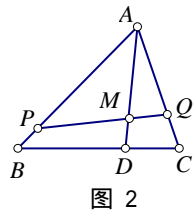
13. Let general terms of three integer sequences $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ be $a_n = 3n + 2, b_n = 2n + 1, c_n = 5n - 1, n =$

1,2,3,..., respectively. Let $\{d_n\}$ be the sequence formed by the common terms of $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ in their original order. Then the general term of d_n is _____, the sum of its first n terms is _____.

14. 记 $F(x, y) = (x - y)^2 + (\frac{x}{2} + \frac{2}{y})^2$ ($y \neq 0$), 则 $F(x, y)$ 的最小值是_____.

15. 函数 $y = \arcsin(2\sqrt{x^2 - 1} - |x|)$ 的定义域是_____.

16. 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overline{BD} = 2\overline{DC}$, $\overline{AM} = 3\overline{MD}$, 过 M 做直线交 AB 、 AC 于 P 、 Q 两点, 橙子奥数工作室防盗暗记, 则 $\frac{AB}{AP} + \frac{2AC}{AQ} =$ _____.



17. 若函数 $f(x) = \frac{x^4 + (k^2 + 4k - 10)x^2 + 4}{x^4 + 2x^2 + 4}$ ($x \geq 2$) 的最小值是 0, 则实数 k 的值是_____.

18. 方程 $(\arccos x)^2 + (2 - t)\arccos x + 4 = 0$ 有实数解, 则 t 的取值范围是_____.

19. 抛物线 $y = x^2$ 上的长度等于 1 的弦的中点的轨迹方程是_____.

20. 一个球与正四面体的各个棱都相切, 且球的表面积为 8π , 则正四面体的棱长为_____.

二、解答题 (第 21 题 10 分, 第 22、23 题各 15 分. 满分 40 分)

21. 解关于 x 的不等式: $|\log_a x| + |\log_a^2 x - 1| > a$ ($a > 1$).

22. 已知双曲线 C 的中心在坐标原点 O , 两条准线的距离为 $\frac{32}{5}$, 其中一个焦点恰与抛物线 $x^2 + 10x - 4y + 21 = 0$ 的焦点重合.

求双曲线 C 的方程;

若 P 为 C 上任一点, A 为双曲线的右顶点, 通过 P 、 Q 的直线与从 A 所引平行于渐进线的直线分别交于 Q 、 R . 试证明: $|OP|$ 是 $|OQ|$ 与 $|OR|$ 的等比中项.

23. 已知函数 $y = f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 + x}$.

求 y 的定义域和值域, 并证明 y 是单调递减函数;

解不等式 $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 + x} > \frac{1}{2}$. (试题录入: 成俊锋)