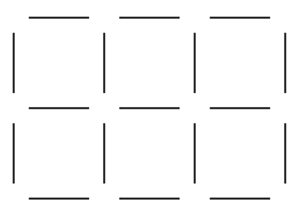
成俊锋的部分数论作品

1. 下图的矩形中包含有单位正方形 6 个，它是用 17 根完全相同的木棒所构成的．每个单位正方形的每条边都恰好是由一根木棒所构成的．请问恰好使用完 500 根木棒所能围成的矩形中，最多能包含有多少个单位正方形？
（第十五届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷笔试用题）



2. 从 1,2,3,4,5，……，2012 中任意选取 3 个整数，这 3 个整数的和除以 3 余数为 1 的情况多，还是余数为 2 的情况多？为什么？
（第十五届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷团体口试用题）

3. 将 108、1008、10008、100008、…、100…08 依次排在一起组成一个能被 81 整除的自然数 108100810008100008…100…08，这个数的数字和至少是______。
（2012 年走美决赛试题）

4. 算式 $1!+2!+3!+4!+5!+6!+\cdots+2012!$ 的计算结果除以 1001 的余数是_____。
（2012 年走美决赛试题）

5. 有 300 盏灯，分别对应编号为 1 至 300 的 300 个开关。现在有编号为 1 至 100 的 100 个人来按动这些开关。已知第 1 个人按的开关的编号是 1 的倍数（也就是说他把所有开关都按了一遍），第 2 个人按的开关的编号是 2 的倍数，第 3 个人按的开关的编号是 3 的倍数……依此做下去，第 100 个人按的开关的编号是 100 的倍数．如果刚开始的时候，灯全是亮着的，那么这 100 个人按完后，还有_______盏灯是亮着的。
(第四届年两岸四地精英赛北京集训队合训模拟卷小高组一试第 9 题)

6. 如果正整数 N 的每一个非零倍数 $\overrightarrow{abc}$ 都满足 $\overrightarrow{bca}$、$\overrightarrow{cab}$ 也都是 N 的倍数（其中 a、b、c 都是 0～9 中的整数，并且约定 $\overrightarrow{123}$ 表示 123，$\overrightarrow{028}$ 表示 28，$\overrightarrow{007}$ 表示 7），那么就称 N 为“完美约数”（例如 9 就是一个“完美约数”）。这样的“完美约数”一共有________个。
（2012 年迎春杯复赛小高组第 13 题，与纪云飞合作）

7. 1，2，3，4，5，6，7，…，2013 的最小公倍数的末尾恰有_________个连续的 0。
（2013 年迎春杯初赛小五网考第 2 题，注意看清楚题意，有黑体）

8. $183\times279\times361-182\times278\times360$ 的计算结果是________（填写 A、B、C、D 四个字母中的一个）。
   A、217017　　B、207217　　C、207216　　D、217016
（2013 年走美初赛小六第 1 题）

9. 一个四位回文数，它最小的 8 个约数的和是 43，那么这个四位回文数是__________。
（2013 年走美初赛小六第 14 题）

10. 菲菲分别统计 A 的约数个数，A 的 2 倍数的约数个数，A 的 3 倍的约数个数，…，A 的 10 倍的约数个数后得到下表。如果这个表中只有一处统计错了，那么整数 A 是_______。

算式	A	$2\times A$	$3\times A$	$4\times A$	$5\times A$	$6\times A$	$7\times A$	$8\times A$	$9\times A$	$10\times A$
约数个数	24	30	36	36	48	45	32	42	49	60

（2013 年走美初赛上海卷小高组用题，题号不详）

11. 有一类数满足：（1）每一位数字都是 7 或 8；（2）数字 7 和 8 都至少出现 1 次；（3）是 7 和 8 的公倍数。这类数中最小的一个是_________。
（第十八届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷一试第 3 题）

12. 甲、乙、丙三个非零自然数满足：甲和乙的最大公约数有 1 个约数，乙和丙的最大公约数有 2 个约数，丙和甲的最大公约数有 3 个约数。那么，甲、乙、丙三数之和最小是_______。
（2014 年迎春杯初赛小五网考第 3 题）

13. 8 的所有约数的乘积是 A，A 的所有约数的乘积是 B，B 的所有约数的乘积是 C，那么，C 有_______个约数。
（2014 年迎春杯复赛小高第 4 题）

14. 把一个自然数分别除以 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16 的余数依次写下来，可以得到一个共有 15 项的数列，如果这个数列的任意两项都不相同，我们就称这个数列叫“神马数列”，不同的“神马数列”共有_________个。
（2014 年迎春杯复赛小高第 11 题）

15. 同时满足下列 3 个条件的十位数称为“神马数”：
（1）每一位数字都不是 0；
（2）前 5 位每一位上的数字都大于 5，
后 5 位每一位上的数字都小于 5；
（3）是 64 的倍数。
那么不同的的“神马数”共有_________个。
（2014 年迎春杯大师赛小五一试第 3 题，小六一试第 3 题，共用题）

16. 如果 $0 \le x \le 100$（x 不一定是整数），那么，随着 x 的不同，式子 $[2x]+[3x]+\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]$ 的计算结果可以得到__________个不同的值。（$[x]$表示不超过 x 的最大整数。）
（第五届两岸四地精英赛北京赛区选拔赛小高组一试第 10 题）

17. 从 1~9 中选出 8 个数字组成一个 8 位数，删去其中任意 6 位，一共可以得到 28 个两位数。如果这 28 个两位数中只有一个是质数，那么，称原来的 8 位数为“神 8 数”。
⑴ 最小的一个“神 8 数”是多少？
⑵ “神 8 数”一共有多少个？
（第五届两岸四地精英赛北京赛区选拔赛小高组二试第 4 题）

18. 如果两个质数的差恰好是 2，称这两个质数为一对孪生质数。例如：3 和 5 是一对孪生质数，29 和 31 也是一对孪生质数. 在数论研究中，孪生质数是最热门的研究课题之一。华裔数学家张益唐在该课题的研究中取得了令人瞩目的成就，他的事迹激励着更多的青年学子投身数学研究。
在不超过 100 的整数中，一共可以找到__________对孪生质数。
（2015 年数学花园探秘网考 5 年级第 1 题）

19. 如果一对孪生质数中的两个质数都不超过 200，这两个质数的和最大为_________。
（2015 年数学花园探秘网考 6 年级第 1 题）

20. 三位数 $\overline{abc}$ 除以它的各位数字和的余数是 1，三位数 $\overline{cba}$ 除以它的各位数字和的余数也是 1。如果不同的字母代表不同的数字且 $a > c$，那么 $\overline{abc}$ 是________。
（2015 年数学花园探秘复赛 A 卷第 11 题）

21. 即约分数 $\frac{n}{m} = 2015 + \frac{207!}{7^{100}}$，那么 n 的末两位是________。
（2015 年数学花园探秘总决赛五年级一试第 2 题）

22. 如果最简分数 $\frac{B}{A}$ 化成循环小数后为 $0.\dot{a}15\dot{b}$，那么 B 的最小值是_______。
（2015 年数学花园探秘总决赛六年级二试第 1 题 与杨凡合作）

23. 证明：任意 4 个自然数一定可以通过算术运算得到 24 的倍数。
算术运算是指：将指定的数字适当排序后，添加”+”、“-”、“×”、“÷”或者括号形成一个算式。
（2015 年数学花园探秘总决赛 6 年级一试第 4 题）

24. 一个 6 位回文数是 95 的倍数，这个回文数最大是__________。
（第二十届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷小高一试第 1 题）

25. 完全平方数除以 1001 的余数有多少种不同的可能？
（第二十届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷团体口试第 3 题）

26. 如果一个自然数的数字和为 8，并且它的每一位数字都是 8 的约数，我们就称这样的自然数为“发数”；那么“发数”共有多少个？
（第二十届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷团体口试第 6 题）

27. 将 3、5、7、9、13、15 分别填入下列方框中，每个数恰好用一次，使得不等号成立，共有多少种不同的填法？

$$\frac{\square}{\square}<\frac{\square}{\square}<\frac{\square}{\square}$$

（第二十届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷团体口试第 8 题）

28. 将 1，3，5，7，9，11，13，15 填入下列方框中，使得不等号成立，有__________种不同的填法。

$$\frac{\square}{\square}<\frac{\square}{\square}<\frac{\square}{\square}<\frac{\square}{\square}$$

（第二十届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷团体口试第 8 题原稿）

29. 如果在 1~150 这 150 个自然数中，只有 a 和 $a+1$ 不是某个整数 N 的约数，那么自然数 a 的值是多少？为什么？
（第二十届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷团体口试第 15 题）

30. 一个完全平方数除以 100 的余数最大是多少？
（第二十届华杯总决赛北京集训队合训模拟卷团体口试第 18 题）

31. 有五堆棋子，个数和为 3 的倍数。每次操作从其中 3 堆中各取走一个棋子；如果能通过一系列操作，使得最后各堆棋子都恰好被取完，则称这五堆棋子是“和谐的”。当五堆棋子的个数分别为以下各组数据时，判断各堆棋子和谐与否。

（1）3、3、3、3、3　（若和谐则 A=1，若不和谐则 A=0）

（2）9、6、3、2、1　（若和谐则 B=1，若不和谐则 B=0）

（3）2、4、6、8、10　（若和谐则 C=1，若不和谐则 C=0）

（4）2、3、5、7、13　（若和谐则 D=1，若不和谐则 D=0）

（5）9、15、19、21、26　（若和谐则 E=1，若不和谐则 E=0）

那么五位数 $\overline{ABCDE}$ ＝__________。

（2016 年数学花园探秘网考六年级第 10 题）

32. 四位数 $\overline{\text{双成成双}}$ 的约数中，恰有 3 个是质数，39 个不是质数，四位数 $\overline{\text{成双双成}}$ 有__________个约数。

（2016 年数学花园探秘初赛五年级 A 卷第 5 题）

33. 四位数 $\overline{\text{好事成双}}$ 除以两位数 $\overline{\text{成双}}$ 的余数恰好为 $\overline{\text{好事}}$，如果不同的汉字表示不同的数字且 $\overline{\text{好事}}$ 和 $\overline{\text{成双}}$ 不互质，那么四位数 $\overline{\text{好事成双}}$ 最大是__________。

（2016 年数学花园探秘复赛高年级 A 卷第 9 题）

34. 分数 $\frac{1}{2016}$ 化成循环小数后，循环节的长度是__________。

（2016 年数学花园探秘复赛高年级 C 卷第 10 题）

35. 有一个由正整数组成的等差数列，共 10 项，已知它们互不相同，但它们的数字和都相同；那么这个数列的这 10 项之和最小是多少？请简述理由。

（2016 年数学花园探秘总决赛暨大师赛口试第 6 题）

36. 从小到大的五个连续非零自然数，其中后面四个自然数的乘积是第一个自然数的倍数，那么第一个自然数最大是__________。

（2017 年数学花园探秘复赛网考五年级 6 题）

37. 一个四位完全平方数，数字和是 30 以上的质数，这个四位数是__________。

（2017 年数学花园探秘复赛网考六年级 4 题）

38. 数字和最大的四位完全平方数是__________。

（2017 年数学花园探秘复赛网考七年级 7 题）

39. 老师让菲菲从 1~9 这 9 个数字中选取 4 个不同的数字，组成一个四位数，使得这个四位数能被所有她没有选中的任意一个数字整除，但不能被选中的任意一个数字整除。那么，菲菲组成的四位数是__________。
（2017 年数学花园探秘初赛五年级 A 卷第 9 题，六年级 A 卷第 10 题）

40. 整数 A 有 15 个约数，A、$2A$、$3A$、$4A$、$5A$ 的约数个数依次增加，那么 A 是_________。
（2017 年数学花园探秘初赛五年级 B 卷第 7 题）

41. 有三个数构成等差数列，它们的约数个数也构成等差数列，这三个数的和最小是__________。
（2017 年数学花园探秘复赛高年级 B 卷第 5 题）

42. 如图，一个圆上有个 48 点。开始时选择其中一个点标上整数 1，然后以顺时针方向跳过 1 个点标上整数 2，再跳过 2 个点标记整数 3，再跳过 3 个点标记整数 4，…… 按这样的方式将整数 1~48 全部标记到点上。如果在标记的过程中发现，即将要标记的点上已经标记有整数，那么就将该点上原有的整数擦去标记上新的整数。

（1）整数 14 有没有被擦掉？请说明理由。
（2）整数 4 有没有被擦掉？请说明理由。
（3）没有被标记的点有多少个？
（2017 年数学花园探秘总决赛暨大师赛五年级一试第 5 题）

43. 将 1~9 填入下面的方框中，每个方框中填入一个数字，使得 9 个分数中，至少有 8 个分数的值是整数，共有________种符合条件的不同填法。

$$\frac{\square}{1},\frac{\square}{2},\frac{\square}{3},\frac{\square}{4},\frac{\square}{5},\frac{\square}{6},\frac{\square}{7},\frac{\square}{8},\frac{\square}{9}$$

（2017 年数学花园探秘总决赛暨大师赛六年级一试第 2 题）

已知 $A=C_{199}^{1}\times C_{199}^{2}\times C_{199}^{3}\times\cdots\times C_{199}^{99}$，那么 A 的末尾共有多少个连续的 0？

（2017 年数学花园探秘总决赛暨大师赛口试第 31 题）

45. 已知 $A=0.\dot{3}456\dot{7}+0.\dot{0}030405060\dot{7}$，那么 A 的小数点后前 55 位的数字总和是多少？
（2017 年数学花园探秘总决赛暨大师赛口试第 35 题）

46. 除以 4、9、25 的余数之和为 17 的所有三位数之和除以 900 的余数是________。
（2019 年数学花园探秘决赛高年级组 A 卷第 11 题）

47. 如果一个自然数的最小质因数是一位数，则称这个数是“好数”。如果连续九个三位数都是“好数”，那么这九个数的平均数最大为________。
（2019 年数学花园探秘决赛高年级组 D 卷第 11 题）

48. 设将自然数 n 表示为两个非零自然数的平方差有 $F(n)$ 种方法，
例如：$15=8^2-7^2=4^2-1^2$，故 $F(15)=2$；而 2 不能表示，故 $F(2)=0$。那么，$F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(100)$ 的计算结果是________。
（2020 年数学花园探秘总决赛暨大师赛六年级二试第 3 题）

49. 已知 n 为大于 2 的正整数，且满足 $\dfrac{50!}{1!\times 2!\times\cdots\times n!}$ 为整数，那么 n 的最大值是多少？
（2020 年数学花园探秘总决赛暨大师赛口试第 3 题）

从前，有一个叫成俊锋的人，他很帅。

有一天，成俊锋上山去捡柴，遇到了一个老人，坐在桥头。老人说，嘿，把我的草鞋给我捡过来。

当时成俊锋正在思考一个有趣的数论问题：**“如果 12345678910…*n* 刚好是 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、…、*n*** 的公倍数。那么这样的 n 有哪些？**”**听到老人的要求，他顺手把草鞋捡给了老人。

老人很高兴，给了成俊锋一本《天线宝宝》，成俊锋读完以后，变得更帅了。

这个故事教育我们大家：双面打印一个奇数页的文件时，有必要插入一个空白页面。